

Notwendige und hinreichende Kriterien für innere Extremwerte

Notwendige Bedingung für innere Extremwerte:

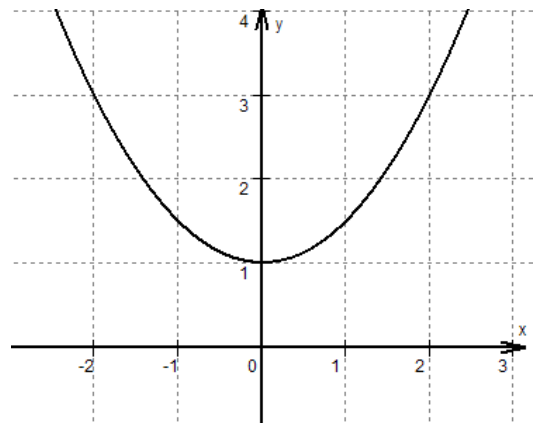
Die Funktion f sei auf einem Intervall I differenzierbar und x_0 eine innere Stelle von I .

Wenn f an der Stelle x_0 einen Extremwert hat, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Notwendige Bedingung für die Existenz einer Extremstelle:
 $f'(x) = 0$ (Waagrechte Tangente)

Begründung für das notwendige Kriterium:

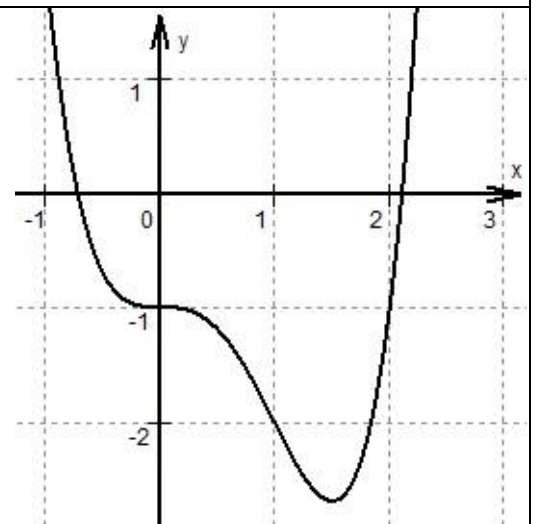
Bsp.: Finde alle Stellen von $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$ mit $f'(x)=0$



Aus $f'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für $x > x_0$ folgt $f'(x) = 0$ für $x = x_0$

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$.
 Berechne mögliche innere Extremstellen von f .

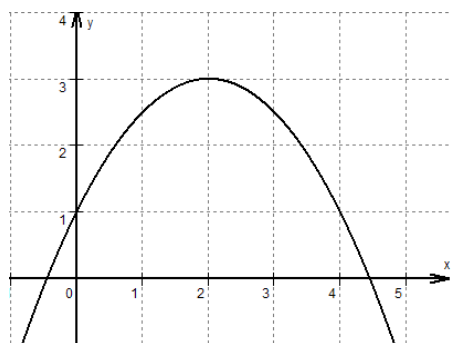
Lösung:



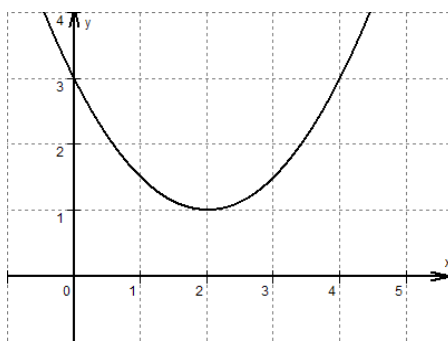
Es gibt also zwei Stellen, an denen der Graph eine
 _____ Tangente hat, aber nur x_2 ist _____, wie
 man am Graphen erkennen kann. Das notwendige Kriterium reicht
 also nicht aus, um _____.
 Man braucht noch ein hinreichendes Kriterium.

Hinreichende Bedingung für innere Extrema.

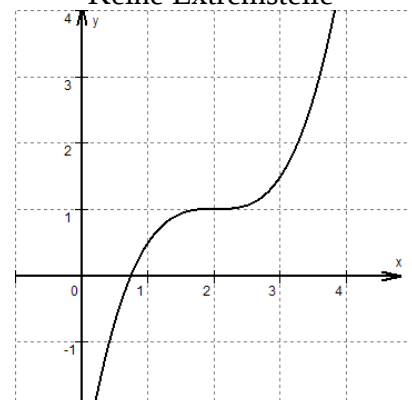
Hochpunkt (Maximum)



Tiefpunkt (Minimum)



Keine Extremstelle



Für $x < x_0$ gilt $f'(x)$ _____
 Für $x > x_0$ gilt $f'(x)$ _____

Für $x < x_0$ gilt $f'(x)$ _____
 Für $x > x_0$ gilt $f'(x)$ _____

Für $x < x_0$ gilt $f'(x)$ _____
 Für $x > x_0$ gilt $f'(x)$ _____

Daraus folgt das _____ (VZW). Der Wechsel des Monotonieverhaltens bzw. der Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ ist ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Extremstelle und gibt darüber hinaus noch an, ob es sich handelt.

Erste hinreichende Bedingung für innere Extremstellen: Vorzeichenwechsel (VZW) von $f'(x)$.

Die Funktion f sei auf einem Intervall I differenzierbar und x_0 eine innere Stelle von I .

Wenn $f'(x_0) = 0$ ist und $f'(x)$ für zunehmende Werte von x bei x_0 von

positiven zu negativen

Werten wechselt, dann hat die Funktion f ein

negativen zu positiven

Werten wechselt, dann hat die Funktion f ein

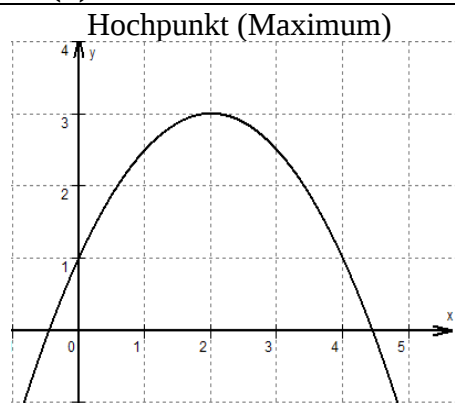
Aufgabe:

Prüfe mit den VZW ob die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1,5$ der oberen Aufgabe wirklich Extremstellen sind.

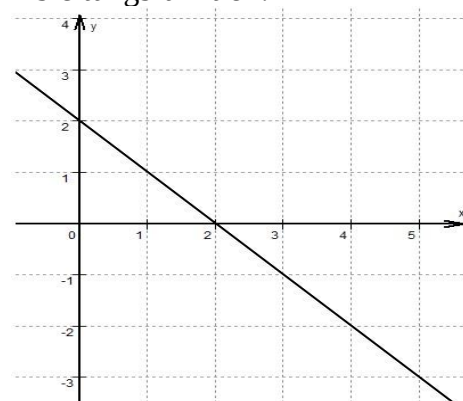
Lösung:

Weg:

Alternative Formulierung des hinreichenden Kriteriums, über das Monotonieverhalten von $f'(x)$, also über die Steigung der Steigungsfunktion oder anders ausgedrückt das Verhalten von $f''(x)$.

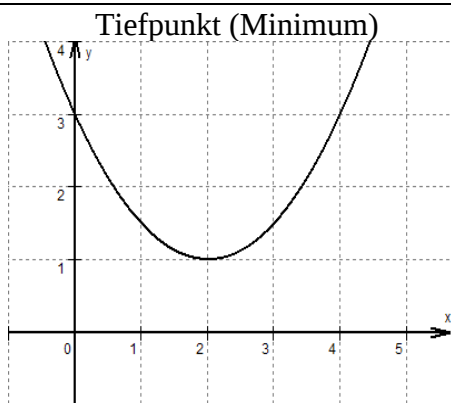


Ableitungsfunktion:

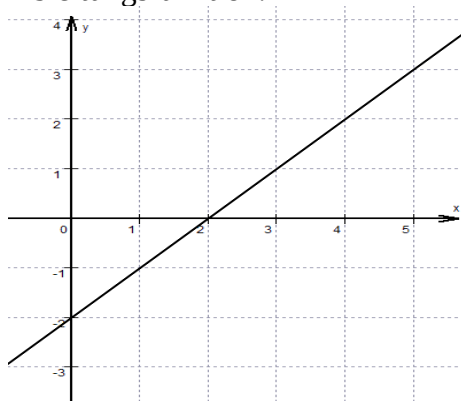


Dies bedeutet für die Steigung der 1. Ableitung, also für $f''(x)$ an der Stelle x_0 :

$f''(x_0)$ _____

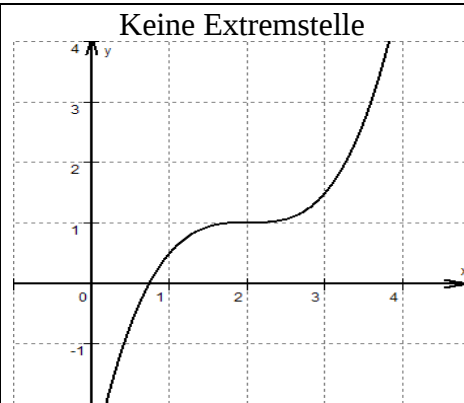


Ableitungsfunktion:

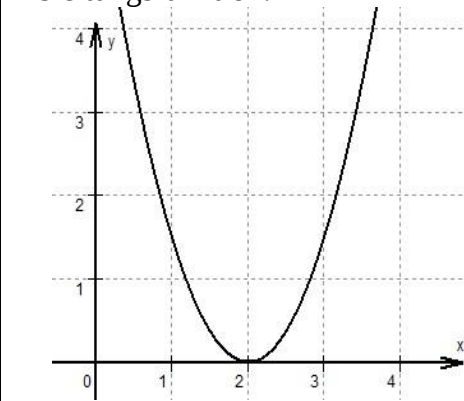


Dies bedeutet für die Steigung der 1. Ableitung, also für $f''(x)$ an der Stelle x_0 :

$f''(x_0)$ _____



Ableitungsfunktion:



Dies bedeutet für die Steigung der 1. Ableitung, also für $f''(x)$ an der Stelle x_0 :

$f''(x_0)$ _____

Daraus kann man ein zweites hinreichendes Kriterium formulieren:

Zweite hinreichende Bedingung für innere Extremstellen:

f sei auf einem Intervall J zweimal differenzierbar und x_0 eine innere Stelle von J .

Dann gilt: Ist $\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) \text{ ____ und } f''(x_0) \text{ ____} \\ f'(x_0) \text{ ____ und } f''(x_0) \text{ ____} \end{array} \right\}$, dann ist $f(x_0)$ ein $\left\{ \begin{array}{l} \text{____} \\ \text{____} \end{array} \right\}$.

Anmerkung: Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann _____

Aufgabe: Prüfe mit dem zweiten Kriterium, ob die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1,5$ der oberen Aufgabe wirklich Extremstellen sind.

Lösung: $f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$ $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ $f''(x) = 12x^2 - 12x$

Prüfe: $x_1 = 0$ _____ Also _____.

Prüfe: $x_1 = 1,5$ _____ Also _____.

Schlussbemerkung:

Um von einer Funktion die Extremstellen geht man üblicherweise folgendermaßen vor:

1. Setze _____.

2. Setze _____.

Notwendige und hinreichende Kriterien für innere Extremwerte Lösung

Notwendige Bedingung für innere Extremwerte:

Die Funktion f sei auf einem Intervall I differenzierbar und x_0 eine innere Stelle von I .

Wenn f an der Stelle x_0 einen Extremwert hat, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Notwendige Bedingung für die Existenz einer Extremstelle:
 $f'(x) = 0$ (Waagrechte Tangente)

Begründung für das notwendige Kriterium:

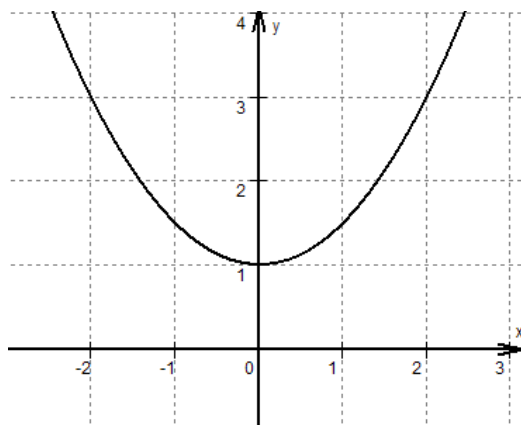
Bsp.: Finde alle Stellen von $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$ mit $f'(x)=0$

Lsg.: $f'(x) = x^3 - 2x$

$$x^3 - 2x = 0$$

$$x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{2} \text{ und } x_3 = -\sqrt{2}$$



Aus $f'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) > 0$ für $x > x_0$ folgt $f'(x) = 0$ für $x = x_0$

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$.
 Berechne mögliche innere Extremstellen von f .

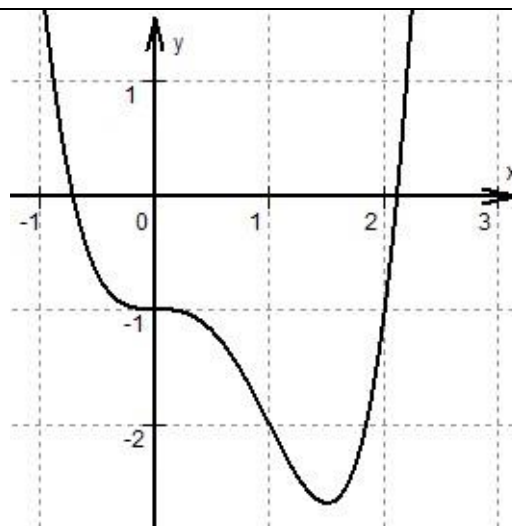
Lösung: Ansatz $f'(x) = 0$ für innere Extremstellen ergibt:

$$4x^3 - 6x^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (4x - 6) = 0. \text{ bzw. } 2x^2 \cdot (2x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

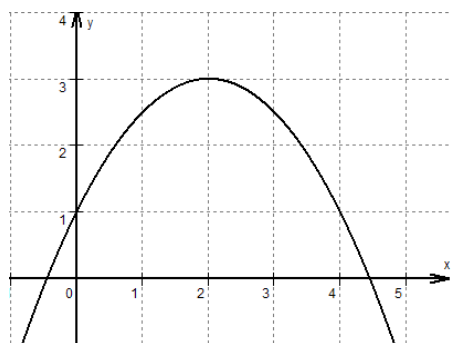
$$2x - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 1,5$$

Es gibt also zwei Stellen, an denen der Graph eine waagrechte Tangente hat, aber nur x_2 ist eine Extremstelle, wie man am Graphen erkennen kann. x_1 nennen wir Sattelpunkt. Das notwendige Kriterium reicht also nicht aus, um eine Extremstelle *eindeutig* zu finden. Man braucht noch ein hinreichendes Kriterium.



Hinreichende Bedingung für innere Extrema.

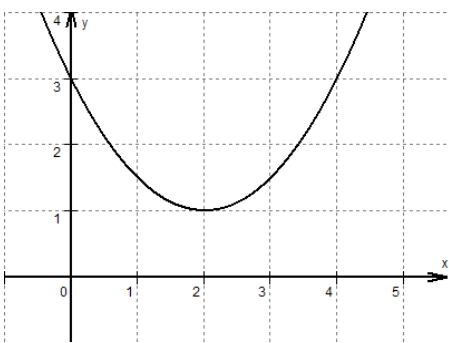
Hochpunkt (Maximum)



Für $x < x_0$ gilt $f'(x) > 0$

Für $x > x_0$ gilt $f'(x) < 0$

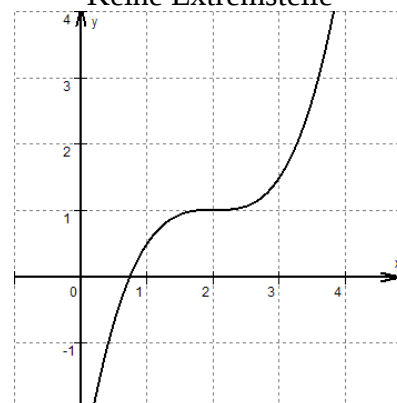
Tiefpunkt (Minimum)



Für $x < x_0$ gilt $f'(x) < 0$

Für $x > x_0$ gilt $f'(x) > 0$

Keine Extremstelle



Für $x < x_0$ gilt $f'(x) > 0$

Für $x > x_0$ gilt $f'(x) > 0$

Daraus folgt das Vorzeichenwechselkriterium (VZW). Der Wechsel des Monotonieverhaltens bzw. der Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ ist ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Extremstelle und gibt darüber hinaus noch an, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.

Erste hinreichende Bedingung für innere Extremstellen: Vorzeichenwechsel (VZW) von $f'(x)$.

Die Funktion f sei auf einem Intervall I differenzierbar und x_0 eine innere Stelle von I .

Wenn $f'(x_0) = 0$ ist und $f'(x)$ für zunehmende Werte von x bei x_0 von

positiven zu negativen

Werten wechselt, dann hat die Funktion f ein lokales Maximum (Hochpunkt) an der Stelle x_0 .

negativen zu positiven

Werten wechselt, dann hat die Funktion f ein lokales Minimum (Tiefpunkt) der Stelle x_0 .

Aufgabe:

Prüfe mit den VZW, ob die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1,5$ der oberen Aufgabe wirklich Extremstellen sind.

Lösung:

Weg: Nimm eine Stelle links und rechts von der zu prüfenden Stelle und setze diese in $f'(x)$ ein. Je nachdem, ob dann $f'(x)$ positiv oder negativ ist, weiß man, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt oder um gar keine Extremstelle handelt.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$$

Prüfe $x_1 = 0$:

Links von x_1 z.B. $x = -0,1$: $f'(-0,1) = 4(-0,1)^3 - 6(-0,1)^2 < 0$

Rechts von x_1 z.B. $x = +0,1$: $f'(0,1) = 4(0,1)^3 - 6(0,1)^2 < 0$

Beide Ergebnisse sind negativ, daher ist $x_1 = 0$ keine Extremstelle, wie man auch oben sieht.

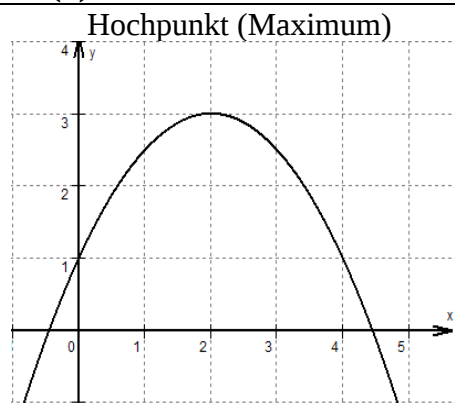
Prüfe $x_2 = 1,5$:

Links von x_2 z.B. $x = 1,4$: $f'(1,4) = 4(1,4)^3 - 6(1,4)^2 < 0$

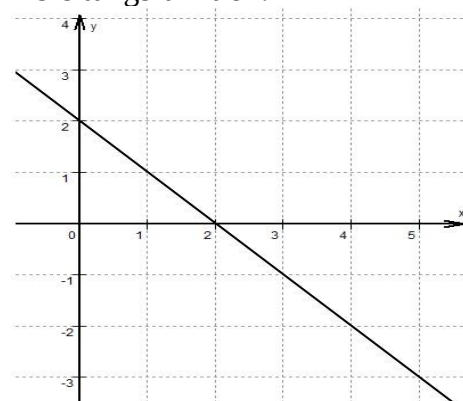
Rechts von x_2 z.B. $x = 1,6$: $f'(1,6) = 4(1,6)^3 - 6(1,6)^2 > 0$

Ein Ergebnis ist negativ, das zweite Ergebnis ist positiv. Daraus folgt, dass es sich um einen Tiefpunkt handelt.

Alternative Formulierung des hinreichenden Kriteriums, über das Monotonieverhalten von $f'(x)$, also über die Steigung der Steigungsfunktion oder anders ausgedrückt das Verhalten von $f''(x)$.

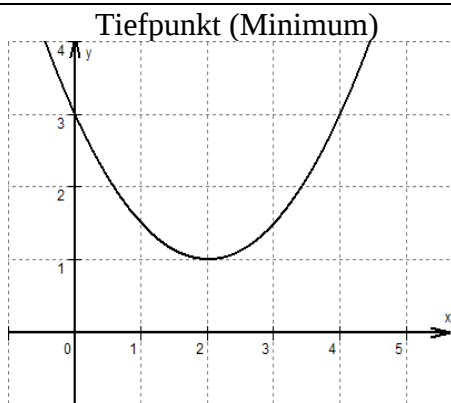


Ableitungsfunktion:

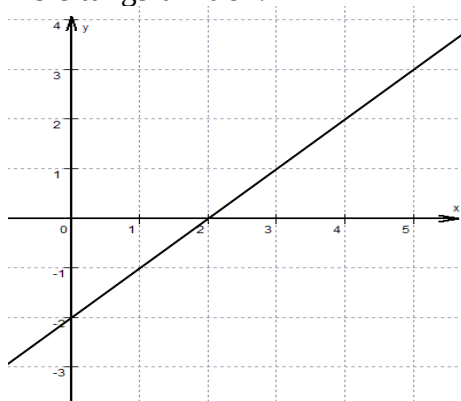


Dies bedeutet für die Steigung der 1. Ableitung, also für $f'(x)$ an der Stelle x_0 :

$$f'(x_0) < 0$$

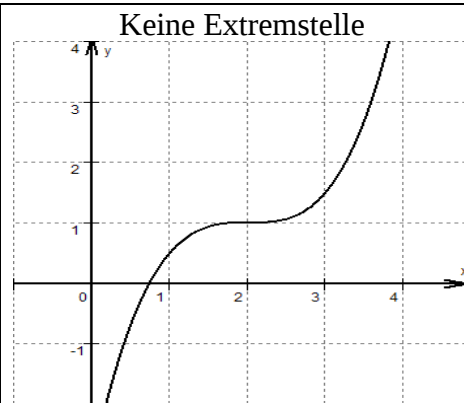


Ableitungsfunktion:

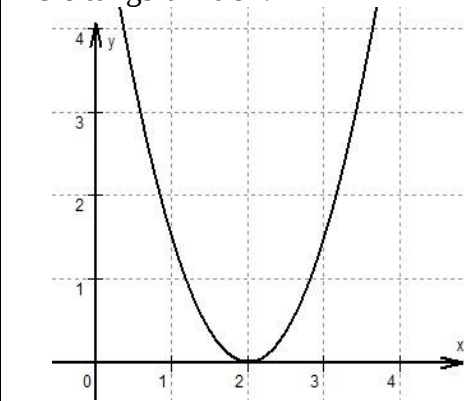


Dies bedeutet für die Steigung der 1. Ableitung, also für $f'(x)$ an der Stelle x_0 :

$$f'(x_0) > 0$$



Ableitungsfunktion:



Dies bedeutet für die Steigung der 1. Ableitung, also für $f'(x)$ an der Stelle x_0 :

$$f'(x_0) = 0$$

Daraus kann man ein zweites hinreichendes Kriterium formulieren:

Zweite hinreichende Bedingung für innere Extremstellen:

f sei auf einem Intervall I zweimal differenzierbar und x_0 eine innere Stelle von I .

Dann gilt: Ist $\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0 \\ f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0 \end{array} \right\}$, dann ist $f(x_0)$ ein lokales $\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$.

Anmerkung: Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann ist x_0 keine Extremstelle, sondern ein Sattelpunkt.

Aufgabe: Prüfe mit dem zweiten Kriterium, ob die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1,5$ der oberen Aufgabe wirklich Extremstellen sind.

Lösung: $f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$ $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ $f''(x) = 12x^2 - 12x$

Prüfe: $x_1 = 0$ $f''(0) = 12(0)^2 - 12(0) = 0$ Also keine Extremstelle.

Prüfe: $x_1 = 1,5$ $f''(1,5) = 12(1,5)^2 - 12(1,5) > 0$ Also $x_1 = 1,5$ ist ein Tiefpunkt.

Schlussbemerkung:

Um von einer Funktion die Extremstellen geht man üblicherweise folgendermaßen vor:

1. Setze $f'(x) = 0$ und finde so alle Stellen, bei denen die Steigung gleich Null ist.
2. Setze diese Stellen in $f''(x)$ ein und finde so heraus, ob es sich um eine Extremstelle handelt und wenn ja, ob es ein Tief- oder Hochpunkt ist.

